ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

HOME | Revista ESPACIOS | ÍNDICES | A LOS AUTORES

Vol. 38 (Nº 29) Año 2017. Pág. 14

Um Modelo de Oligopólio sob Incerteza e Decisões Estratégicas de Investimento: uma aplicação no Mercado Imobiliário da Zona Sul do Rio de Janeiro

An Oligopoly Model under Uncertainty and Strategic Investment Decisions: an application in the Real Estate Market of the South Zone of Rio de Janeiro

Glaudiane Lilian de ALMEIDA [1]; Luiz Eduardo Teixeira BRANDÃO [2]; Marco Antônio Guimarães DIAS [3]

Recibido: 10/01/2017 • Aprobado: 12/02/2017

Conteúdo

RESUMO:
Este trabalho fornece uma solução analítica fechada para um modelo matemático de oligopólio a partir da utilização de ferramentas da Teoria das Opções Reais e da Teoria dos Jogos. Para ilustrar a aplicabilidade deste modelo, sua solução foi aplicada à realidade do mercado imobiliário residencial a partir da série histórica de preços de venda e custos de construção. Os resultados apontam para uma perda de valor da opção de espera, pois a medida em que aumenta o número de concorrentes no setor, as empresas construtoras tenderão a exercer as suas opções de investimento em novas construções, escolhendo os gatilhos mais baixos, na relação preço e custo de construção.
Palavras-chave: Opções Reais. Mercado Imobiliário. Processo Estocástico. Teoria dos Jogos.

ABSTRACT:
This work provides an analytical solution to a mathematical model of oligopoly using the tools of the Real Option Theory and Game Theory. To illustrate the applicability of this model, its solution was applied to the reality of the residential real estate from the historical series of sale prices and construction costs. The results point to a loss of value of the waiting option, as the number of competitors increases in the sector, the construction companies will tend to exercise their investment options in new constructions, choosing the lowest triggers, in relation to price and cost of construction.
Keywords: Real Options. Real Estates. Stochastic Process. Game Theory.

1. Introdução

Essencialmente, a abordagem de opções reais para analisar a oportunidade de investir em um projeto é análoga a uma opção americana de compra sobre a oportunidade de investimento. Uma vez que a analogia é feita, um diversificado ferramental da teoria das opções financeiras pode ser aplicado para analisar essa opção de investimento. A abordagem das opções reais é bem resumida em Dixit e Pindyck (1994).

O resultado mais conhecido da literatura de opções reais é a invalidação da regra de decisão dada pelo método tradiconal conhecido como Valor Presente Líquido (VPL) de investir em qualquer projeto com um margem líquida a valor presente não negativa. A regra ótima de investimento, conforme descrito na literatura de opções reais, é investir quando o valor do ativo exceder o custo de investimento por um prêmio da opção potencialmente grande. Embora o método de avaliação VPL amplamente utilizado seja determinístico, o método das opções reais leva em consideração o valor da opção criado pelo resultado futuro incerto.

Desde a década de 1980, tem havido muito interesse na pesquisa acadêmica em métodos de avaliação de opções reais. Uma vasta gama de modelos e estruturas foram estudadas e propostas. Titman (1985), Williams (1991) e Trigeorgis (1991) fornecem algumas das estruturas conceituais mais influentes no campo, especialmente quando aplicadas ao desenvolvimento imobiliário.

Embora a avaliação das opções reais dê uma visão mais abrangente do valor do investimento em comparação ao método neoclássico do VPL, esta é realizada em um cenário monopolístico.

O valor da opção, conforme descrito nos métodos de precificação de opções reais, pode não ser uma representação precisa do valor do projeto avaliado pelas empresas. Grenadier (1996) e Schwartz e Torous (2007) demonstram que as competições entre os construtores imobiliários corroem o valor da opção e ilustram que o método de avaliação de opções reais por si só não é suficientemente abrangente para refletir as situações do mundo real. As interações estratégicas são componentes essenciais a serem considerados no processo de avaliação de projetos de construção. Portanto, a aplicação da teoria dos jogos na análise de opções reais tem fornecido *insights* importantes a um nível estratégico.

Na literatura acadêmica há uma crescente quatidade de estudos que analisam a relação entre a flexibilidade gerencial e a estratégia competitiva através da análise de jogos de opções reais.

Essa interseção da teoria das oções reais com a teoria dos jogos foi desenvolvida para captar a dinâmica das interações estratégicas em um ambiente competitivo e de incerteza, sendo capaz de guiar as decisões gerenciais e possibilitar uma quantificação mais completa das oportunidades de mercado, uma vez que avalia a sensibilidade de decisões estratégicas a variáveis exógenas e situações competitivas (L. D. Costa, Azevedo, & Samanez, 2015).

Azevedo e Paxson (2014) ressaltam a falta de estudos empíricos que apliquem jogos de opções reais. De acordo com os autores, uma calibração dos parâmetros e seus resultados comparados, contribuirá significativamente para o progresso futuro desses modelos matemáticos aplicados às finanças.

A partir deste contexto, este trabalho tem como objetivo fornecer uma solução analítica fechada para um modelo matemático de oligopólio utilizando uma função de demanda linear inversa. Para ilustrar a aplicação prática do modelo, escolhemos o mercado imobiliário residencial do Rio de Janeiro, onde serão determinadas as estratégias ótimas de investimento, considerando o custo de construção e o preço dos apartamentos. Tais estratégias são calculadas e avaliadas no contexto das opções reais e da teoria dos jogos, onde a partir da interseção dessas metodologias, será demonstrado que as construtoras tenderão a exercer mais cedo suas opções de investimento em novas contruções a medida em que o número de concorrentes neste mercado aumenta.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Após esta introdução, a seção 2 apresenta as ideias fundamentais que norteiam a Teoria das Opções Reais e a Teoria dos Jogos, especialmente ao considerar o contexto de suas aplicações no desenvolvimento do mercado imobiliário. Em seguida, a seção 3 desenvolve e apresenta a solução analítica do modelo matemático a partir das equações diferencias ordinárias e suas condições de contorno. A seção 4 faz uma aplicação do modelo proposto ao mercado imobiliário a partir de dados de imóveis residenciais de bairros da zona sul da cidade do Rio de Janeiro. A seção 5 traz os resultados obtidos através dos *softwares* RStudio e Excel e em seguida estão apresentadas as conclusões.

2. A Teoria das Opções Reais e a Teoria dos Jogos

O desenvolvimento imobiliário é uma das clássicas aplicações das opções reais. Como em Titman (1985) e Williams (1991), o desenvolvimento do imobiliário é análogo a uma opção americana de compra, onde o preço de exercício é igual ao custo de construção. Uma opção é um contrato ou situação que dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação de comprar (*call*) ou vender (*put*) um determinado ativo (por exemplo, ações ordinárias ou projeto) pagando o preço de exercício.

O valor da terra pode ser análogo ao valor da opção. Ao manter o terreno e adiar a construção, o valor intrínseco do terreno seria maior do que o valor residual, como demonstrado em Quigg (1993).

A abordagem tradicional da teoria das opções reais implica que os construtores ignoram o comportamento de seus concorrentes frente à possíveis novas construções.

No entanto, nos mercados imobiliários, as construtoras e incorporadoras estão susceptíveis a enfrentar consideráveis competições de concorrentes, e as atividades de desenvolvimento dos concorrentes terá um impacto fundamental sobre suas opções de desenvolver um projeto de construção. Assim, ao ampliar a abordagem das opções reais considerando a interação estratégica como endógena ao modelo, obtém-se um rico conjunto de implicações estratégicas. Enquanto os modelos de opções reais padrão ditam que um desenvolvedor deve esperar até que a opção de desenvolvimento esteja consideravelmente *in-the-money*, o que significa que o valor de um edifício é muito maior do que o custo de construção. Com isso, ao considerar a competição, o receio da ameaça de preempção forçará os construtores a exercerem suas opções mais cedo. Além disso, enquanto os modelos de opções reais padrão implicam que as construções serão simultâneas, os modelos de teoria dos jogos permitem a possibilidade de construções sequenciais. Modelos competitivos de desenvolvimento imobiliário também podem ajudar a explicar o comportamento de "*boom-and-bust*" nas construções comerciais, bem como o motivo pelo qual os desenvolvedores racionais podem construir novos prédios diante da demanda declinante e dos valores de mercado como ilustrado em Grenadier (1996).

3. O Modelo Matemático de Oligopólio

Baseando-se nas considerações iniciais do modelo desenvolvido por Grenadier (2002) considera-se uma indústria oligopolista com n firmas iguais. O número de firmas é fixo, mas cada uma pode produzir mais de uma unidade. É assumida a premissa que o investimento é infinitamente divisível, o que significa que a firma i pode adicionar uma capacidade infinitesimal dq com investimento infinitesimal dI.

Em um oligopólio formado por n firmas iguais, cada firma possui opções americanas de compra compostas perpétuas, para expandir sua produção no mercado.

O preço de uma unidade de produção, oscila de forma estocástica no tempo e é dado por uma curva de demanda inversa , onde representa o processo de choque exógeno na demanda e é definido como o processo de oferta da indústria. A função é duas vezes diferenciável continuamente, estritamente crescente em e estritamente decrescente em .

O processo de oferta de todas as firmas, com exceção da firma é dado por . Dado o estado atual da indústria, o fluxo de lucro da firma é determinado pela Eq.

O preço de uma unidade de produção, $P(t)$ oscila de forma estocástica no tempo e é dado por uma curva de demanda inversa $P(t) = D\left[X(t), Q(t)\right]$, onde $X(t)$ representa o processo de choque exógeno na demanda e $Q(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)$ é definido como o processo de oferta da indústria. A função D é duas vezes diferenciável continuamente, estritamente crescente em X e estritamente decrescente em Q[1].

O processo de oferta de todas as firmas, com exceção da firma i é dado por $Q_{-i}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} q_j(t)$. Dado o estado atual da indústria, o fluxo de lucro da firma i é determinado pela Eq. (1)

$$\pi_i\left[X(t), q_i(t), Q_{-i}(t)\right] \equiv q_i(t) \cdot D\left[X(t), q_i(t) + Q_{-i}(t)\right] \qquad (1)$$

Em qualquer instante do tempo cada empresa pode investir em capacidade adicional afim de aumentar sua produção por um incremento infinitesimal $dq_i \equiv \frac{dQ}{n}$. Se todas as firmas aumentarem sua capacidade de forma simultânea, $Q(t)$ sofrerá um aumento equivalente a dQ. O custo deste incremento é linear de forma que o aumento da produção envolve um custo K por unidade produzida[2].

Consideramos um processo geral de Itô para a fonte de incerteza que é o choque exógeno da demanda $X(t)$ que segue um processo de difusão homogêneo no tempo da forma da Eq. (2):

$$dX = \mu(X)dt + \sigma(X)dz \qquad (2)$$

onde $z(t)$ é um processo de Wiener. Se $\mu(X) = \mu$ e $\sigma(X) = \sigma$ então $X(t)$ segue um Movimento Geométrico Browniano, com distribuição normal. O fluxo de caixa é avaliado de forma neutra ao risco, sendo a taxa de desconto igual a taxa livre de risco *r*.

3.1 Síntese do modelo de equilíbrio

De acordo com a proposição 1 de Grenadier (2002), o valor de equilíbrio de cada firma i será descrito como $V^i\left(X, q_i, Q_{-i}\right)$. A estratégia de investimento no equilíbrio para cada empresa é assinalada por uma acréscimo incremental de sua produção toda vez que $X(t)$ atingir o gatilho. A equação diferencial livre de arbitragem do valor da firma $V^i\left(X, q_i, Q_{-i}\right)$, aplicando a fórmula de Ito-Doeblin, é dada pela Eq. (3)

$$\frac{1}{2}\sigma(X)^2 V_{XX}^i + \alpha(X)V_X^i - rV^i + \pi_i\left(X, q_i, Q_{-i}\right) = 0 \tag{3}$$

sendo que suas condições de contorno são dadas pelas Eq. (4) e (5):

$$\text{Se } X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})\,;\; V_{q_i}^i\left(X^*, q_i, Q_{-i}\right) = I(K) \tag{4}$$

A equação (4) representa a condição de continuidade ou *value – matching*. Condição no gatilho ótimo da firma i, que exerce sua opção em X*, expandindo sua produção em Idq_i, investindo Idq_i[3].

$$\text{Se } X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})\,;\; V_{q_i}^i\left(X^*, q_i, Q_{-i}\right) = 0 \tag{5}$$

A equação 5 é a condição de suavidade ou *smooth-pasting*). Condição de exercício ótimo da firma *i*, é a derivada da condição de contorno de continuidade em relação a X[4]. A continuidade nos gatilhos dos rivais, que no caso simétrico são os mesmos X^*:

$$X(t) = X^*(q_i, Q_{-i});\; \mathrm{V}_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0 \tag{6}$$

Pois $\mathrm{V}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = \mathrm{V}^i(X^*, q_i, Q_{-i} + dQ_{-i})$. A equação (3) e as três condições de contorno são a "Proposição 1" de Grenadier (2002), que sumariza o equilíbrio usando o método diferencial.

Cada firma *i* maximiza o seu valor $V^i(X, q^i, Q_{-i})$ considerando as estratégias dos rivais ("gatilhos").

Além de ser uma condição de contorno, é também uma condição de continuidade, porém no gatilho dos competidores $X_{-i}(q_i, Q_{-i})^*$ que é igual ao seu gatilho $X_i(q_i, Q_{-i})^*$ já que o equilíbrio é simétrico.

Considerando o tempo contínuo e um cenário de equilíbrio perfeitamente competitivo, (Leahy, 1993) demonstrou que a política de investimento de cada firma é idêntica à estratégia míope, onde a empresa ignora o efeito que os competidores exercem no preço das opções. Assim, desenvolve-se a estratégia de exercício relacionada ao equilíbrio de Nash como se fosse determinada por uma firma possuindo uma estratégia míope de exercício das opções reais.

Na "Proposição 3" é estabelecido o equilíbrio com apenas duas condições de contorno. Denota-se o valor da firma míope por M^i (X, q_i, Q_{-i}). Seja o valor marginal da produção da firma míope m^i (X, q_i, Q_{-i}) dado por $m^i(X,q_i,Q_{-i}) = \partial M^i(X,q_i,Q_{-i}) / \partial q_i$. Por simetria, $X^i(q_i,Q_{-i})^* = X^*(Q)$, com $q_i = \dfrac{Q}{n}$ e $Q_{-i} = (n-1).Q/n$. No ENPS simétrico cada firma exercerá sua opção no gatilho X*(Q).

A equação diferencial do valor da firma míope M^i (X, q_i, Q_{-i}) é dada pela equação 7:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 M^i_{XX} + \alpha(X)M^i_X - rM^i + \left(\frac{Q}{n}\right)D(X,Q) = 0 \quad (7)$$

A condição de contorno de Continuidade deverá ser satisfeita se $X(t) = X^{**}(q_i,Q_{-i})$

$$M^i_{q_i}(X^{**},q_i,Q_{-i}) = I \quad (8)$$

Pelo fato da firma ser míope, ela ignora a competição exercendo a opção no gatilho míope X^{**} equivalente à X^* de V^i (proposição 2 de Grenadier (2002)). A condição de contorno de suavidade será satisfeita pela Eq. (9):

$$X(t) = X^{**}(q_i,Q_{-i});\ M^i_{q_iX}(X^{**},q_i,Q_{-i}) = 0 \quad (9)$$

Pelo fato de ser míope, a firma ignora a competição, não havendo assim condições de contorno de competição. Neste sentido, o valor marginal da produção da firma míope será definido pela derivada parcial de $M^i_{q_i} = m^i(X)$. A equação diferencial ordinária pode ser encontrada a partir de sua derivada de M, alterando o fluxo de caixa.

3.2 Dedução da Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Para deduzir a parte homogênea da EDO para o valor da firma, utilizamos o conhecido método dos ativos contingentes e Fórmula de Ito-Doeblin. A Eq. (10) representa toda a EDO incluindo a parte homogênea e a parte não homogênea.

$$\frac{1}{2}\sigma(X)^2 m_{xx} + \alpha(X)m_X - rm + D(X,Q) + (Q/n)D_Q(X,Q) = 0 \quad (10)$$

As condições de contorno como a condição de continuidade e suavidade em X*(Q), dadas por (11) e (12) são suficientes para determinar X*(Q) e m(X,Q).

$$m(X^*(Q),Q) = I \quad (11)$$

$$\frac{\partial m(X^*(Q),Q)}{\partial X} = 0 \quad (12)$$

Os termos dos fluxos de caixa não-homogêneos da EDO compreendem a função demanda modificada. O gatilho estratégico é igual ao gatilho "míope" X* (ver Proposição 2 de Grenadier para mais detalhes). O formato da equação diferencial parcial é aplicado para qualquer processo estocástico de Itô. Sendo assim, para o MGB, temos: α(X) = αX e σ(X) = σX . Na próxima seção será apresentada a solução analítica da EDO.

3.3 Solução analítica da Equação Diferencial Ordinária

A solução para a EDO requer a imposição de uma condição de contorno no limite inferior do espaço para o processo de X(t). Neste trabalho, será adotada uma função demanda inversa linear da forma:

$$P(t) = X(t)\ [a + bQ] \qquad (13)$$

Dessa forma X(t) pode seguir livremente um MGB pois o preço será sempre positivo. Assume-se que $b > 0$ para garantir que $D_Q < 0$ e, a deve ser maior que zero para assegurar que os lucros marginais sejam decrescentes em X. De acordo com a formulação da equação (2), X(t) representa um choque multiplicativo na demanda que segue um MGB e evolui como um movimento Geométrico Browniano na forma $d(X) = \mu X dt + \sigma X dz$. Assume-se que $r > \mu$ para garantir a convergência do processo estocástico.

O oligopólio pode ser resolvido como um problema de otimização de um único agente. Para isso será considerado que a indústria segue uma estrutura de concorrência perfeita que vai maximizar uma função objetivo hipotética, que usa a função demanda artificial da forma:

$$D'(X,Q) = D(X,Q) + (Q/n)D_Q(X,Q) \qquad (14)$$

A equação (14) é a parte não homogênea da EDO representada pela equação 10. Este termo não homogêneo é uma função do ativo básico X e não uma constante. Assim, será necessária uma função para denotar o fluxo de caixa gerado por m(X,Q).

A partir da sua solução, fornecerá conjuntamente o gatilho de investimento no equilíbrio, $X^*(Q)$, e o valor marginal da firma míope. Para tanto, considera-se que em um equilíbrio de Nash simétrico cada firma exercerá sua opção de investimento sempre que $X(t)$ atingir o gatilho $X^*(Q)$. De acordo com a proposição 3 de Grenadier (2002), a partir de (10) e de suas condições de contorno, pode-se determinar $X^*(Q)$ e $m(X,Q)$. A EDO (10) possui uma parte homogênea e parabólica de segunda ordem que tem solução analítica geral conhecida na literatura de opções reais:

$$m(X) = K\,X^{\beta} \qquad \text{para } X < X^* \tag{15}$$

onde β é um parâmetro e A é uma constante que pode ser encontrada através das condições de contorno. Para determinar o parâmetro β, é necessário encontrar as raízes da equação quadrática gerada a partir da substituição da equação 15 e suas derivadas parciais na parte homogênea da equação diferencial ordinária (10):

$$1/2\ \sigma^2 X^2 A\, \beta\, (\beta - 1)\, X^{\beta - 2} + \mu\, X\, A\, \beta\, X^{\beta - 1} - r\, A\, X^{\beta}$$

Após algumas manipulações algébricas, cancela-se o termo $A\,X^{\beta}$ e obtém-se a equação característica quadrática da parte homogênea da EDO:

$$1/2\ \sigma^2 \beta\, (\beta - 1)^{2} + \mu\, \beta - r = 0 \tag{16}$$

Reescrevendo, obtém-se um formato tradicional para a equação do segundo grau:

$$1/2\ \sigma^2 \beta^2 + (\mu + 1/2\ \sigma^2)\, \beta - r = 0 \tag{17}$$

A equação 17 é uma equação quadrática que possui duas raízes para β. Sendo uma equação quadrática, as duas raízes de β são encontradas através de uma conhecida fórmula para as raízes de uma equação de segundo grau:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2} \tag{18}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2} \tag{19}$$

Ao substituir as equações 18 ou 19 em (15), verifica-se que a equação 15 é solução da parte homogênea da equação (10). Cabe ressaltar que nas equações das raízes aparecem apenas os parâmetros do processo estocástico neutro ao risco do ativo básico.

3.4 Solução particular da parte não homogênea da EDO < /h3>

Considerando a eq. (14) que representa a parte não homogênea da EDO (eq. 10), é necessário encontrar uma solução particular que atenda toda a equação diferencial. Assim, divide-se (14) por (r – α) que representa a taxa de desconto para o fluxo de caixa em perpetuidade.
A solução particular pode ser escrita da forma:

$$\frac{\left(aX(t)+bX(t)Q(t)\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)}{(r-\alpha)} \tag{20}$$

O próximo passo é calcular as derivadas parciais $\frac{\partial m}{\partial X}$ e $\frac{\partial^2 m}{\partial X^2}$, em seguida substituir seus resultados na EDO (eq. 10) a fim de verificar se a solução particular realmente atende toda a EDO. Neste caso, (20) é solução da EDO.
Considerando as condições de contorno de continuidade e suavidade, definidas pelas equações (11) e (12), pode-se estruturar um simples sistema com duas equações:

$$A_1 X^{\beta_1} + \frac{aX(t) + bX(t)\left(\frac{n+1}{n}\right)}{r-\alpha} = k \qquad (21)$$

$$A_1 \beta_1 X^{\beta_1 - 1} + \frac{a + bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)}{r-\alpha} = 0 \qquad (22)$$

Resolvendo o sistema, determina-se o termo A_1 e o gatilho X* (X,Q). De (22) chega-se à expressão para o termo A_1 em função de X, Q e dos parâmetros, como mostra a equação 23:

$$A_1 = \frac{-bQ\left(\frac{n+1}{n}\right) - a}{(r-\alpha)\beta_1} X^{1-\beta_1} \qquad (23)$$

Substituindo (23) na equação 21, obtém-se a expressão (24) que será agrupada algebricamente a fim de obter um formato que possibilite uma interpretação intuitiva no contexto das opções reais.

$$\left(-bQ\left(\frac{n+1}{n}\right) - a\right)X + \beta_1 X\left(a + bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \beta_1 (r-\alpha)k \qquad (24)$$

A partir da equação (24), é interessante destacar a cunha $\left(\beta_1 / \beta_1 - 1\right)$ e o termo da demanda. Reescrevendo, tem-se:

$$X^*\left(a + bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)(\beta_1 - 1) = \beta_1 (r-\alpha)k \qquad (25)$$

Por fim, determina-se o gatilho ótimo X*:

$$X^*(Q) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\right)\frac{(r-\alpha)k}{a + bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)} \qquad (26)$$

E, rescrevendo em um formato clássico de opções reais, chega-se à uma expressão mais fácil de ser interpretada:

$$X^* \frac{a+bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)}{(r-\alpha)} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\right)k \qquad (27)$$

Em (27), o termo do lado esquerdo da expressão representa o valor presente do fluxo de caixa em perpetuidade. A eq. (27) pode ser reescrita de uma forma que fique explícita a dependência do equilíbrio no grau de competição, da seguinte forma:

$$X^* = \varphi_n\left(a+bQ\right) \qquad (28)$$

Nesse sentido, pode-se verificar que φ_n é o preço máximo em oligopólio, pois, nesse nível, as firmas adicionam capacidade (exercem a opção real) numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional. É possível notar que o gatilho X*(Q) decresce com o número de firmas no oligopólio (*n*). Uma expressão matemática para o preço máximo na estrutura oligopolista pode ser dado por (29):

$$\varphi_n = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\right)\left((r-\alpha)k\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \qquad (29)$$

A dinâmica de exercícios de opções quando a demanda X atinge o gatilho X* pode ser identificada quando todas as *n* firmas exercem suas opções de expansão e adicionam oferta, de forma que os preços não conseguem superar um nível máximo.

Para manter o preço em valor igual ou menor que υ_n, a adição de capacidade dQ quando $X(t) > X^*(Q)$, com custo IdQ, terá de ser maior, quanto maior for a diferença $X(t) - X^*(Q)$ o que significa notar que se $X(t) > X^*(Q)$, então:

$$Q(t) = \frac{\varphi_n - aM(t)}{bM(t)}. \qquad (30)$$

Onde $M(t) \equiv \sup\left[X(s) : 0 \leq s \leq t\right]$.

---

4. Aplicação do Modelo ao Mercado Imobiliário Residencial Carioca

Tradicionalmente, os investimentos em mercados imobiliários caracterizam-se como intensivos em capital e com baixa liquidez, além das fontes de incertezas na demanda, nos preços e custos de construção que elevam o risco percebido pelos investidores (F. A. Costa & Samanez, 2008). Para captar riscos e incertezas inerentes a tais projetos imobiliários têm sido empregadas metodologias de análise de investimentos em projetos de capital que possam modelar essas incertezas de forma consistente.

Neste contexto, a seguir será aplicado o modelo, desenvolvido na seção 3, que irá combinar a Teoria dos Jogos com a Teoria das Opções Reais que poderão colaborar com a análise financeira de investimentos no setor imobiliário do Rio de Janeiro, dando suporte aos gestores no processo de tomada de decisão.

Como objeto de avaliação, foram considerados os valores mensais médios (em m^2) relacionados ao preço de venda dos imóveis residenciais em quatro bairros localizados na zona sul do Rio de Janeiro, conforme apresentado no Quadro 1:

Quadro 1: Bairros analisados

1. Botafogo
2. Flamengo
3. Copacabana
4. Laranjeiras

Para estimar os parâmetros foram utilizadas séries de valores mensais médios por m² de apartamentos residenciais com 2 quartos. As séries históricas para os preços de venda de imóveis têm início em junho de 2009 e término em janeiro de 2016. Os dados foram disponibilizados pelo Secovi-Rio (Sindicato da Empresas de Compra, Venda, Locação e Administração de Imóveis e dos Condomínios Residenciais e Comerciais do Estado do Rio de Janeiro).

4.1. Estimativa dos Parâmetros do Processo Estocástico

Seguindo a literatura que trata da modelagem matemática de ativos financeiros, uma característica importante do modelo desenvolvido neste trabalho é que o fluxo de caixa representado pelo choque multiplicativo na demanda (eq. (13)) segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB).

A escolha por tal processo estocástico foi baseada no teste econométrico realizado para a variável estocástica X (t). O teste usual é o teste de raiz unitária, conhecido na literatura de séries temporais como teste de Dickey Fuller Aumentado (ADF).

Tabela 1: Parâmetros do MGB

Parâmetros	Valores (% ao ano)
Tendência Neutra ao Risco	11,6
Volatilidade	8,25

4.2. Estimativa de parâmetros para o processo estocástico do Custo Básico de Construção (CUB-RJ)

Escolhemos a série histórica do custo básico da construção calculada pelo Sindicato da Indústria da Construção Civil no Estado do Rio de Janeiro (Sinduscon – RJ). O CUB-RJ é estimado com base em projetos de construção residencial padronizados, contudo, não são levadas em consideração em sua base de cálculo, algumas características como condições de acabamento, equipamentos e a qualidade do material empregado.

Para a estimativa dos parâmetros do processo estocástico para o CUB-RJ, foi inicialmente aplicada a primeira diferença do logaritmo natural da série histórica e dos estimadores.

Tabela 2: Estimativa dos parâmetros do MGB para o custo de construção

Parâmetros	Índice CUB por m2 (% ao ano)
Drift	6,24

Volatilidade	4,62

4.3 Estimativa dos Parâmetros da Função de Demanda Inversa Linear

A principal característica do modelo desenvolvido neste artigo foi a utilização de uma função de demanda inversa linear (eq. (13)) devido à sua simplicidade e grande utilização nos mais diversos modelos microeconômicos. Neste sentido, para que possamos aplicar o modelo de oligopólio à realidade do mercado imobiliário residencial carioca, torna-se necessário estimar os principais parâmetros da equação de demanda linear. A partir das séries históricas de preços e quantidades, realizamos uma regressão linear trivial em tempo discreto com as observações consecutivas. Os parâmetros a e b foram então estimados através do *software* Eviews 7.0.

Tabela 3: Resultado do Modelo de Regressão Linear

Parâmetros	Valores
Intercepto *(a)*	143,08
Inclinação *(b)*	0,0563
Teste F*	79,1248

*com grau de liberdade = 77

4.4. Taxa de Juros Livre de Risco

Como *proxy* para o retorno do ativo livre de risco, são vistos como uma boa representação para a taxa livre de risco (r), os títulos soberanos de 10 anos de maturidade do governo brasileiro, atualmente, em torno de 10,27% ao ano, de acordo com os dados da *Bloomberg*. A este valor é necessário descontar um valor referente ao *default risk* do Brasil, representado pelo índice EMBI+ (*Emerging Markets Bonds Index Plus*), atualmente, em torno de –1,94%. Assim, uma boa aproximação para a taxa livre de risco para o Brasil é a diferença entre esses valores, ou seja: r=12,21% ao ano.

4.5. Resultados Médios

A partir das estimativas de todos os parâmetros necessários à aplicação do modelo que tem como objetivo final determinar os gatilhos ótimos em equilíbrio de Nash, podemos obter os resultados médios para o cálculo dos gatilhos que vão definir as estratégias ótimas de equilíbrio.

Como simplificações da realidade do desenvolvimento do mercado imobiliário, podemos indicar a não consideração de impostos, o tempo para construção e o preço do terreno. Neste trabalho, as análises são realizadas sob a premissa de que o construtor ou a empresa incorporadora já possuíam o terreno no momento da decisão de exercer a opção de investir em novas construções. Assim, resumidamente, os parâmetros necessários para calcular os gatilhos ótimos são, a saber: as volatilidades dos preços e do custo de construção, além das tendências de crescimento, os parâmetros da função de demanda inversa linear, a taxa de juros livre de risco, o choque inicial multiplicativo da demanda, a quantidade inicial produzida e, por fim, o número de empresas concorrentes.

Neste sentido, a partir da equação (28), podemos encontrar os valores para os gatilhos de investimentos em equilíbrio que, sob a importante premissa de que a partir da modelagem com o auxílio da Teoria dos Jogos, foi possível obter as estratégias ótimas de investimento em novas construções nos bairros da zona sul do Rio de Janeiro. Tais estratégias ótimas levaram em consideração da concorrência de forma endógena. Os resultados dos gatilhos X*(Q) para os imóveis residenciais localizados em quatro bairros da zona sul do Rio de Janeiro encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4: Gatilhos ótimos no equilíbrio

Nº de concorrentes	X* (Q)
01	9,788
02	7,830
03	5,873
04	4,606
05	3,764
06	3,174

Os resulatdos obtidos através do modelo apresentado permite uma interpretação interessante no que diz respeito à modelagem das opções reais com a competição trabalhada endogenamente. Os resultados dos gatilhos ótimos mostram que a cocnorrência leva as contrutoras a excerecerem mais cedo suas opções de investimento em novas contruções. Por outro lado, no modelo de oligopólio, a concorrência leva ao aumento da produção total, elevando os lucros dos detentores das opções. Esse resultado tem impactos tanto para os vendedores quanto para os compradores de imóveis.

---

5. Considerações Finais

As decisões de investimento são caracterizadas pela concorrência estratégica entre empresas rivais, em que cada empresa avalia as suas vantagens comparativas frente aos seus concorrentes, onde as condições de mercado, como valor do produto, volatilidade dos fluxos de receitas e participação de mercado em monopólio e duopólio, afetam diretamente os resultados.

O presente trabalho permitiu exemplificar como as metodologias de Opções Reais e da Teoria dos Jogos podem colaborar na análise financeira de investimentos no mercado imobiliário, dando suporte ao processo de tomada de decisão sobre investir em novas construções, analisando as opções e os tipos de incerteza existentes tanto em seus projetos como naqueles dos concorrentes.

Para tanto, fornecemos uma solução analítica fechada com a utilização de uma função de demanda linear inversa que permitiu tornar o modelo de oligopólio mais simples de ser aplicado. Além do modelo matemático, foram obtidos resultados por meio da utilização de parâmetros de custo e preço dos imóveis, determinou-se a estratégia ótima de investimentos, considerando o momento ideal para o desembolso.

Tais resultados permitiram observar de que forma os modelos de jogos de opções reais têm fornecido uma metodologia de análise de investimento plausível que incorpora tanto a incerteza e a concorrência a partir das técnicas de avaliação de investimento clássicas ou modelos de opções reais, mantendo as avaliações dos projetos de investimento sob a premissa da flexibilidade gerencial.

Esta pesquisa permitiu identificar caminhos que podem ser seguidos por outros pesquisadores da área de opções reais ao utilizar os modelos com a concorrência modelada endogenamente. Em primeiro lugar, as assimetrias dentro de tais modelos poderiam ser melhor identificadas e consequentemente medidas. Em segundo lugar, explorar a área muitas vezes obscura entre a liderança endógena e exógena por parte das empresas e esclarecer os determinantes da relação de ordenação líder-seguidor.

Referências Bibliográficas

Costa, F. A., & Samanez, C. P. (2008). Teoria dos jogos e opções reais: uma aplicação no mercado imobiliário brasileiro. Revista Brasileira de Economia de Empresas, 8(2), 57-62.

Costa, L. D., Azevedo, F. P., & Samanez, C. P. (2015). Investment strategies in the Brazilian industry of aluminum cans: an analysis in the context of real options games. [Article]. Rbgn-Revista Brasileira De Gestao De Negocios, 17(57), 1246-1263.

Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). Investment under uncertainty. New Jersey: Princeton University Press.

Grenadier, S. R. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. Journal of Finance, 51(5), 1653-1679.

Grenadier, S. R. (2002). Option exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms. Review of Financial Studies, 15(3), 691-721.

Harrison, J. M., & Taksar, M. I. (1983). INSTANTANEOUS CONTROL OF BROWNIAN-MOTION. Mathematics of Operations Research, 8(3), 439-453.

Leahy, J. V. (1993). Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior. Quarterly Journal of Economics, 108(4), 1105-1133.

Quigg, L. (1993). Empirical Testing of Real Option- Pricing Models. Journal of Finance, 48(2), 621-640.

Titman, S. (1985). URBAN LAND PRICES UNDER UNCERTAINTY. [Article]. American Economic Review, 75(3), 505-514.

Trigeorgis, L. (1991). ANTICIPATED COMPETITIVE ENTRY AND EARLY PREEMPTIVE INVESTMENT IN DEFERRABLE PROJECTS. Journal of Economics and Business, 43(2), 143-156.

Williams, J. (1991). Real estate development as an option. J Real Estate Finan Econ, 4(2), 191-208.

---

1. Doutoranda em Engenharia de Produção na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e Professora do curso de graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense; Mestre em Economia pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Economista pela UFRRJ. Email: glaudianealmeida@id.uff.br

2. Doutor em Engenharia de Produção pela Produção na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e Professor do departamento de Administração na PUC-Rio; Mestre em Engenharia Civil pela Universidade de Stanford; Engenheiro Civil pela PUC-Rio.

3. Doutor em Engenharia de Produção pela Produção na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e Professor do departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Mestre em Engenharia de Produção pela PUC-Rio.

4.

[1] Além disso, a fim de assumir valores finitos para os ativos, $E\left\{\int_0^{\infty} e^{-rt} D\left[X(t),\hat{q}\right]dt\right\} < \infty$, para todo $\hat{q} \in R_+$ fixo.

[2] De acordo com Harrison e Taksar Harrison, J. M., & Taksar, M. I. (1983). INSTANTANEOUS CONTROL OF BROWNIAN-MOTION. *Mathematics of Operations Research, 8*(3), 439-453., os pressupostos de que a função lucro é côncava em q_i e que os custos do investimento são proporcionais garantem a capacidade ideal de expansão.

[3] A condição de contorno de *value – matching* diz que $V_X^i\left(X^*, q_i, Q_{-i}\right) = V_X^i\left(X^*, q_i + dq, Q_{-i}\right) - Idq$ é obtida dividindo-se o incremento infinitesimal dq em seguida calcula-se a derivada parcial.

[4] No ótimo as inclinações são iguais: $V_X^i\left(X^*, q_i, Q_{-i}\right) = V_X^i\left(X^*, q_i + dq, Q_{-i}\right)$ e, quando derivada parcialmente, a condição de contorno *smooth-pasting* pode ser obtida.