ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

HOME Revista ESPACIOS ÍNDICES A LOS AUTORES

EDUCACIÓN • EDUCAÇÃO • EDUCATION Vol. 38 (Nº 55) Año 2017. Pág. 15

Alcuino de York: matemática na Idade Média

Alcuin of York: Mathematics in the Middle Ages

Karolina Barone Ribeiro da Silva HRENTCHECHEN 1

Recibido: 23/07/2017 • Aprobado: 07/08/2017

Conteúdo

RESUMO:
Neste artigo são descritos alguns resultados de um projeto de pesquisa intitulado *Matemática Recreativa na Idade Média*, que encontra-se em execução. Por meio de pesquisa bibliográfica foi elaborada uma breve biografia de Alcuino de York, um clérigo inglês que viveu na época conhecida como Idade das Trevas e seria o autor de uma coleção de problemas de matemática recreativa, dos quais treze são apresentados e comentados aqui.
Palavras chave Matemática recreativa, resolução de problemas, Idade das Trevas.

ABSTRACT:
This article describes some results of a research project entitled Recreational Mathematics in the Middle Ages, which is currently underway. A brief biography of Alcuin of York, an English clergyman who lived in the time known as the Dark Ages, was the author of a collection of problems of recreational mathematics, of which thirteen are presented and commented here.
Keywords Recreational mathematics, problem solving, Dark Ages.

1. Introdução

Neste artigo são descritos alguns resultados de um projeto de pesquisa desenvolvido no Departamento de Matemática da UNICENTRO (campus Irati – PR), intitulado *Matemática Recreativa na Idade Média*, que será encerrado em 2018.

A Idade Média foi um período quase inexpressivo para a Matemática no Ocidente quando comparado com o desenvolvimento alcançado pelos matemáticos do Islã.

Na Europa Ocidental, em plena *Idade das Trevas*, viveu o clérigo inglês Alcuino de York (730 – 804), a quem é creditada a primeira coleção de problemas de matemática recreativa (PÉREZ, 2000), intitulada *Propositiones ad acuendos juvenes* (Proposições para provocar os jovens).

Alcuino é pouco conhecido entre alunos e professores brasileiros, embora *Propositiones* seja composta de problemas atemporais e que podem ser resolvidos por meio de conteúdos previstos tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Médio. Apesar de simples, os problemas são desafiadores e tratam de assuntos do cotidiano da Idade Média (PICKOVER, 2009).

Além disso, concordo com Lauand (1986, p. 10) que afirma que o estudo da Educação na Idade Média é importante para qualquer curso de formação de professores, uma vez que proporciona compreender a "orientação da escola e da pedagogia modernas".

Diante do exposto anteriormente se justifica o interesse por estudar os problemas de Alcuino e apresentar soluções para eles que sejam adequadas à Educação Básica, com base nas orientações das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008).

Na seção 3 deste artigo é apresentada uma pequena biografia de Alcuino, bem como o enunciado e a resolução comentada de treze problemas que compõem *Propositiones*.

---

2. Metodologia

Uma das modalidades de pesquisa mais comuns em história da matemática é a pesquisa bibliográfica. De acordo com Marconi e Lakatos (2017, p. 33), a pesquisa bibliográfica ou de fontes secundárias é o

> […] levantamento de referências já publicadas, em forma de artigos científicos (impressos ou virtuais), livros, teses de doutorado, dissertações de mestrado. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com o que foi escrito sobre determinado assunto […]

As principais fontes selecionadas e analisadas durante a pesquisa foram livros de história da matemática (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2008; BOYER, 1996; CONTADOR, 2008; EVES, 2004; GARBI, 2006; KATZ, 1998 e ROQUE, 2012) acessíveis tanto a professores da Educação Básica quanto a professores e estudantes de cursos de licenciatura. Utilizou-se também uma obra específica sobre matemática medieval (LAUAND, 1986).

---

3. Resultados

Garbi (2006), no capítulo *Árabes, hindus, chineses e Europa Medieval* relaciona a matemática européia medieval apenas a Boécio (c. 475 – 524) e em seguida a Gerbert (c. 950 – 1003). Não há menção a Alcuino, que teria nascido por volta de 735. O mesmo ocorre em Contador (2008), que apenas comenta que

> Para a história, a Idade Média ou o período medieval tem início no ano de 476 d.C. quando aconteceu a queda do Império Romano. Já para a história da Matemática é comum usar como referência para o início deste período o ano de 524 d.C., ano em que morreu Boécio [...] (CONTADOR, 2008, p. 445).

Eves (2004), no capítulo *Aritmética Pitagórica*, afirma que "Para Alcuino (735 – 804), toda a raça humana descende das 8 almas da arca de Noé, sendo essa criação imperfeita porque 8 é deficiente, já que $1 + 2 + 4 < 8$." (EVES, 2004, p. 99).

O mesmo autor destaca que Alcuino foi um

> [...] erudito inglês, nascido em Yorkshire. Foi a ele que Carlos Magno convidou para desenvolver seu ambicioso projeto educacional. Alcuino escreveu sobre muitos tópicos matemáticos e consta, inclusive, como dele (embora haja dúvidas a respeito) uma coleção de problemas em forma de quebra-cabeça que exerceu muita influência nos autores de textos escolares por muitos séculos (EVES, 2004, p. 190).

Eves (2004) apresenta, na seção 8.1, alguns exercícios. Dentre eles estão cinco problemas. O autor comenta que "Alcuino de York (c. 775) pode ter sido o compilador da coleção latina intitulada *Propositiones ad acuendos juvenes*." Os cinco problemas constam a seguir:

> (a) Distribuindo-se 100 buschels (1 buschel = 36,367 litros) de grãos entre 100 pessoas de modo que cada homem receba 3 buschels, cada mulher 2 e cada criança 1/2 buschel, quantos são os homens, quantas as mulheres e quantas as crianças?
>
> (b) Trinta frascos – 10 cheios, 10 pela metade e 10 vazios – devem ser divididos entre 3 filhos de modo que frascos e conteúdos sejam partilhados igualmente. Como se pode fazer isto?
>
> (c) Um cachorro põe-se a perseguir um coelho que está 150 pés a sua frente, saltando 9 pés enquanto o coelho salta 7. Com quantos saltos o cachorro alcança o coelho?
>
> (d) Um lobo, uma cabra e um repolho devem ser transportados para a outra margem de um rio num barco que só aguenta um deles, além do barqueiro. Como se deve fazer para que o lobo não como a cabra, nem esta coma o repolho?
>
> (e) O testamento de um moribundo impõe que se sua esposa, que está grávida, tiver um filho, este herdará 3/4 e a viúva 1/4 dos bens; mas se nascer uma filha, esta herdará 7/12 e a viúva 5/12 dos bens. Como devem ser divididos os bens no caso de nascer um casal de gêmeos? (A origem desse problema é romana. A resposta dada por Alcuino em sua coleção não é satisfatória) (EVES, 2004, p. 314).

Seguem explicações para cada problema, elaboradas por mim, baseadas nas resoluções dadas por Eves (2004).

Solução do problema (a):

Sejam H, M e C a quantidade de homens, mulheres e crianças, respectivamente. Pelo enunciado do problema, tem-se:

$$H + M + C = 100 \text{ (I)}$$

$$3H + 2M + (1/2)C = 100 \text{ (II)}$$

De (II) vem que $6H + 4M + C = 200$. Desta forma, $5H + 3M + H + M + C = 200$ (III). Substituindo (I) em (III), tem-se $5H + 3M = 100$ (IV), ou seja, $3M = 100 - 5H = 5(20 - H)$. Logo, como $20 - H$ é um número inteiro, 3M é múltiplo de 5. Portanto M é múltiplo de 5 e assim $M = 5n$ (V), com n natural e maior que zero.

Substituindo (V) em (IV), tem-se $5H + 15n = 100$, ou seja, $H = 20 - 3n$ (VII). Agora, substituindo (V) e (VII) em (I), vem que $C = 100 - (20 - 3n) - 5n = 80 - 2n$ (VIII).

Pelo contexto do problema, deve ocorrer $M > 0$, $H > 0$ e $C > 0$, isto é, $5n > 0$, $20 - 3n > 0$ e $80 - 2n > 0$. Resolvendo o sistema de inequações, obtém-se $0 < n < 20/3$. Desta forma, como n é natural, seus possíveis valores são 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De acordo com Eves (2004), a resposta dada por Alcuino admite $n = 3$. Neste caso, $H = 20 - 9 = 11$, $M = 15$ e $C = 80 - 6 = 74$.

Solução do problema (b):

Eves (2004, p. 758) apenas comenta que é possível mostrar que cada filho "deve receber o mesmo número de frascos inteiramente vazios e de frascos cheios. Há muitas soluções."

Uma outra possibilidade de divisão é a que segue:

Filho 1: recebe 5 fracos vazios e 5 frascos cheios.

Filho 2: recebe o mesmo que o filho 1.

Filho 3: recebe 10 frascos pela metade.

Solução do problema (c):

Eves (2004, p. 758) chama de x o número de saltos necessários e diz que $9x - 7x = 150$.

Resolvendo a equação apresentada pelo autor, tem-se $x = 75$.

Assim, o cachorro precisa dar 75 saltos para alcançar o coelho. Desta forma o cachorro percorrerá $9 \times 75 = 675$ pés, assim como o coelho, que inicialmente já tinha percorrido 150 pés e depois percorrerá mais $7 \times 75 = 525$ pés.

Solução do problema (d):

Eves (2004) não resolve o problema, apenas solicita que o leitor encontre duas soluções e afirma que outros desafios desse tipo podem ser encontrados em Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*, p. 214-222.

Na fonte indicada por Eves (2004) é sugerida uma solução no capítulo intitulado *Permutational Problems* (Problemas de Troca/Permutação), na seção *Difficult Crossings* (Travessias Difíceis). A chave da solução é tomar cuidado com a cabra, uma vez que ela pode consumir o repolho e também ser presa do lobo. Kraitchik (2006) descreve a trajetória a ser percorrida pelo barqueiro: primeiro ele leva a cabra e volta sozinho; pega o repolho e leva; traz a cabra de volta; leva o lobo e volta sozinho; por último leva a cabra.

Solução do problema (e):

Eves (2004, p. 758) apenas sugere: "Que tal 5/27 para a mãe, 15/27 para o filho e 7/27 para a filha?".

Além de Eves (2004), há algumas informações sobre Alcuino em outras fontes. Boyer (1996, p. 170) também comenta que Alcuino foi chamado por Carlos Magno para revitalizar o ensino na França e que ele teria contribuído de forma tão importante para a Educação que alguns historiadores chamam esta época de Renascimento carolingiano. Boyer (1996) afirma que Alcuino explicou que o mundo foi criado em 6 dias, porque 6 é um número perfeito (aquele cujos divisores positivos, excluindo ele mesmo, tem como resultado de sua soma o próprio número. Observe que os divisores de 6 que seguem esta regra são 1, 2 e 3 e que $1 + 2 + 3 = 6$). Boyer (1996) finaliza dizendo que o inglês escreveu um pouco de aritmética, geometria e astronomia para principiantes.

Katz (1998) traz pouca contribuição à pesquisa, apenas comentando que Alcuino havia estudado com uma professora irlandesa e foi auxiliado na corte de Carlos Magno por muitos clérigos irlandeses.

Fischer (2006, p. 147) destaca que nas reformas educacionais da época de Carlos Magno houve, em 789, uma

> [...] revisão completa de todos os livros eclesiásticos nos principais centros monásticos da Alemanha, da França e do norte da Itália. Foi o inglês Alcuino de York – abade, de 796 a 804, do mais influente entre todos estes centros (San Martín de Tours) – quem supervisionou pessoalmente a criação do que mais tarde seria chamado de "minúscula carolina". Essa foi a reforma na escrita mais significativa do Ocidente dos últimos dois mil anos.

Berlinghoff e Gouvêa (2008), bem como Roque (2012), não citam Alcuino.

De todas as fontes consultadas, a que mais evidencia as contribuições de Alcuino para a matemática é Lauand (1986).

Segundo Lauand (1986, p. 73), na Idade Média era comum ocorrerem diálogos com brincadeiras, adivinhações, que tinham "uma função pedagógica: aguçar a inteligência dos jovens". O mesmo autor comenta que Alcuino teria escrito uma coletânea de problemas com esta finalidade e que o inglês teria dito a Carlos Magno que "deve-se ensinar divertindo".

Além disso, Lauand (1986) traz 14 problemas da *Propositiones ad acuendos juvenes*, com suas respectivas soluções ou dicas de solução. A seguir são apresentados os enunciados e comentários sobre as soluções de nove destes problemas.

1. *Problema da lesma*: Uma lesma foi convidada por uma andorinha para um almoço

> em um local a uma légua de distância. A lesma só anda uma onça (1/12) de pé por dia. Diga, quem quiser, quantos anos ou dias andou a lesma para chegar ao almoço?
>
> R.: Uma légua são 1500 passos e, portanto, 7500 pés ou 90000 onças. Levou, portanto 90000 dias, isto é, 246 anos e 210 dias (LAUAND, 1986, p. 97).

Para entender a resolução apresentada por Lauand, tem-se que saber que 1 légua = 15840 pés. Mas isto não está de acordo com a resolução, que afirma que 1 légua = 7500 pés.

O segundo problema apresentado é o do lobo, da cabra e da couve, já enunciado por Eves (2004). Contudo, a solução proposta é diferente. Primeiro o homem leva a cabra. Depois volta e pega o lobo. Deixa o lobo do outro lado do rio. Pega a cabra e volta com ela. Deixa a cabra e leva a couve. Volta, pega a cabra e a leva até o outro lado do rio.

Na sequência são apresentados mais dois problemas.

> 3. *Problema do boi:* Um boi está arando todo o dia, quantas pegadas deixa ao fazer o último sulco?
>
> R.: Nenhuma em absoluto. Pois o boi precede o arado e o arado segue o boi; e, assim, todas as pegadas que o boi faz na terra trabalhada, o arado as apaga. E, deste modo, não se encontrará no último sulco nenhuma pegada.
>
> 4. *Problema do rei e do seu exército arregimentado em 30 localidades*: Certo rei ordenou a um seu servo que convocasse exército em 30 localidades, de modo tal, que, em cada localidade arregimentasse tantos homens quantos para lá tivesse levado. Assim, na 1ª localidade chegou o servo sozinho e, portanto, recrutou um homem; à 2ª, chegaram 2 (o servo e o 1º recruta) e, portanto, recrutaram outros dois 2; na 3ª, 4; e assim por diante. Diga, quem puder, quantos homens foram arregimentados? (LAUAND, 1986, p. 98).

Na solução apresentada para o problema 4, Lauand afirma que após passar pela 1ª localidade, o número de soldados era 2; após passar pela 2ª localidade, o número de soldados era 4; após passar pela 3ª localidade, o número de soldados era 8 e assim sucessivamente. Finalmente, após passar pela 30ª localidade, o número de soldados era 1073741824. Observe que o número de soldados após passar na n-ésima localidade é 2n.

Dois outros problemas:

> 5. *Problema dos dois caminhantes que viram cegonhas*: dois homens andando pelo caminho viram cegonhas e disseram entre si: - Quantas são? E, contando-as, disseram: Se fossem outras tantas, e ainda outras tantas; e, se somasse metade de um terço do que deu e ainda se acrescentassem mais duas, seriam 100. Diga, quem puder, quantas cegonhas foram vistas por eles inicialmente?
>
> R.: 28. Pois 28 com 28 e 28 dá 84. Metade de um terço, 14; que somado com 84 dá 98, que acrescido de 2, resulta 100.
>
> 6. *Problema dos dois homens que casam um com a mãe do outro*: Se dois homens casam um com a mãe do outro, que relação de parentesco haverá entre seus filhos? (LAUAND, 1986, p. 99).

Uma outra maneira de resolver o problema 5 é denominar de C o número de cegonhas. Assim $C + C + C + (3C/3)(1/2) + 2 = 100$ e consequentemente, $C = 28$.

Lauand (1986) afirma que o problema 6 não apresenta solução no texto original. Contudo, Lauand (s.d., p. 8) diz que cada um dos filhos será, ao mesmo tempo, tio e sobrinho do outro.

Para entender o parentesco, suponha que Agostinho se casa com Tereza, sendo esta mãe de Gustavo, que se casa com Vera, a mãe de Agostinho. Agostinho e Tereza tem um filho, chamado Eduardo. Gustavo e Vera tem um filho chamado Francisco. Assim, Eduardo será irmão de Gustavo e Francisco será irmão de Agostinho. Como o filho do irmão de alguém é sobrinho desta pessoa, então como Francisco é irmão de Agostinho e Eduardo é filho de Agostinho, logo

Eduardo será sobrinho de Francisco, ou seja, Francisco será tio de Eduardo. Analogamente, Francisco será sobrinho de Eduardo, isto é, Eduardo será tio de Francisco.

Continuando com a apresentação dos problemas, tem-se:

> *7. Problema da escada de 100 degraus:* Numa escada de 100 degraus, no 1º degrau está pousada uma pomba; no 2º, 2; no 3º, 3; no 4º, 4; no 5º, 5; e assim em todos os degraus até o 100º. Diga, quem puder, quantas pombas há no total? (LAUAND, 1986, p. 100).

Lauand (1986) afirma que basta tomar a pomba do 1º degrau e somá-la às 99 do 99º, o que dá 100. Depois, somar as pombas do 2º com as do 98º degrau. Também dará 100. O mesmo ocorre com a soma das do 3º com as do 97º. E assim por diante, até somar as do 49º com as do 51º e, no final, somar as 50 do 50º e as 100 do 100º. Assim, tem-se $100 \times 49 + 50 + 100 = 5050$ pombas.

Uma outra possibilidade é resolver o problema utilizando progressão aritmética. Note que o número de pombas em cada degrau forma a progressão aritmética (1, 2, 3, ..., 99, 100), de razão 1, cujo primeiro termo é a1 = 1, o último é a100 = 100 e o número de termos é n = 100. Desta forma, utilizando a expressão conhecida atualmente para o cálculo da soma S de termos de uma P.A., tem-se $S = (a1 + an)(n/2) = (1+100)(100/2) = 5050$ pombas.

Na sequência, mais um problema é descrito:

> *8. Problema do disco:* Um disco pesa 30 libras, ou seja, 360 onças, ou, o que é equivalente, 600 sólidos. E é feito de ouro, prata, auricalco e estanho. O que tem de ouro, três vezes tem de prata; o que tem de prata, três vezes tem de auricalco; o que tem de auricalco, três vezes tem de estanho. Quanto tem de cada metal? (LAUAND, 1986, p. 100).

Lauand (1986) afirma que o ouro pesa 9 onças; a prata, 2 libras e 3 onças; o auricalco, o triplo da prata, ou seja, 6 libras e 9 onças; e o estanho, 20 libras e 3 onças, totalizando 30 libras.

Para entender esta resposta, sejam O, P, A e E, respectivamente, as quantidades de ouro, prata, auricalco e estanho presentes no disco. Logo:

$$P = 3O,\ A = 3P,\ E = 3A \text{ e } O + P + A + E = 600.$$

Desta forma, $(P/3) + P + 3P + 9P = 600$ e assim, $O = 15$ sólidos, $P = 45$ sólidos, $A = 135$ sólidos e $E = 405$ sólidos. Note que $15 + 45 + 135 + 405 = 600$.

Por meio de regra de três simples e pelo início do enunciado, determina-se que 1 sólido = 0,05 libras e que 1 sólido = 0,6 onças. Já que O = 15 sólidos, então O = 9 onças; P = 45 sólidos = 40 sólidos + 5 sólidos = 2 libras e 3 onças. Como o auricalco é o triplo da prata, então A = 3×2 libras e 3×3 onças = 6 libras e 9 onças. Por fim, como E = 405 sólidos = 400 sólidos + 5 sólidos, segue que E = 20 libras e 3 onças.

Por fim, o último problema analisado na pesquisa:

> 9. *Problema do comprador*: Disse certo negociante: Quero com 100 denários comprar 100 suínos; mas cada porco custa 10 denários, cada leitoa, 5, e cada 2 porquinhos, 1 denário. Diga, quem entendeu, quantos porcos, leitoas e porquinhos devem ser comprados para que o preço seja exatamente 100 denários, nem mais nem menos? (LAUAND, 1986, p. 100).

Na resposta apresentada por Lauand (1986), serão comprados 1 porco, 9 leitoas e 90 porquinhos. Não há explicação de como obter tal resultado.

Note que sendo P a quantidade de porcos, L a de leitoas e p a de porquinhos, tem-se $P + L + p = 100$ (aqui o total é de 100 suínos) e também $10\,P + 5\,L + 0{,}5\,p = 100$ (aqui tem-se 100 denários). Multiplicando a última equação por -2 e somando com a primeira, obtém-se $-19\,P - 9\,L = -100$, ou seja, $9\,L = 100 - 19P$.

Como L > 0, então 100 – 19 P > 0 e consequentemente P < 5,26. Desta forma, P = 1, 2, 3, 4 ou 5.

Para P = 1, L = 9 e p = 90. Para P = 2, 3, 4 ou 5, são obtidos valores não inteiros para L. Logo, com 100 denários é possível comprar 1 porco, 9 leitoas e 90 porquinhos.

4. Conclusões

Alcuino foi uma pessoa de destaque na Idade Média por suas contribuições na Educação, sobretudo durante o império de Carlos Magno.

Para a matemática teria deixado uma coleção de problemas recreativos, para aguçar a mente dos jovens. Tais desafíos podem ser resolvidos por meio de conteúdos previstos nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná.

Espera-se com este artigo evidenciar a importância do legado de Alcuino e estimular professores e alunos a conhecerem e resolverem outros problemas de *Propositiones*.

Referências bibliográficas

BERLINGHOFF, W.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*. (2008). 2. ed. São Paulo: Blücher.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. (1996). São Paulo: Edgard Blücher.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática: uma breve história*. v. 1. (2008). 2. ed. São Paulo: Livraria da Física.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. (2004). Campinas: Editora da UNICAMP.

FISCHER, S. R. *História da leitura*. (2006). São Paulo: Editora UNESP.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.* (2006). São Paulo: Ed. Livraria da Física.

KATZ, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. (1998). 2. ed. USA: Addison Wesley Longman.

KRAITCHIK, M. *Mathematical Recreations*. (2006). 2. ed. rev. New York: Dover Publications.

LAUAND, L. J. *Educação, teatro e matemática medievais*. (1986). São Paulo: Perspectiva.

LAUAND, J. *Enigmas, alegoria e religião na educação medieval*. p. 1-10. Obtido em: http://docplayer.com.br/19252116-Enigmas-alegoria-e-religiao-na-educacao-medieval.html.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. *Metodologia do trabalho científico: projetos de pesquisa, pesquisa bibliográfica, teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos de conclusão de curso*. (2017). 8. ed. São Paulo: Atlas.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática. 2008. Obtido em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>.

PÉREZ, M. M. De la aritmética medieval al álgebra renacentista. (2000). In: Junta de Andalucía (Ed.). *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*.

PICKOVER, C. A. *The math book*. (2009). New York: Sterling Publishing Company.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. (2012). Rio de Janeiro: Zahar.

1. Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste. kbarone@unicentro.br

[Índice]